

# 解析解によるメッシュフリー解析の理論的背景

## On Theoretical Background of the Mesh-Free Analysis Method by Analytic Solutions

静岡理科大学 浦田 喜彦

Yoshihiko URATA  
Shizuoka Institute of Science and Technology,  
Toyosawa 2200-2, Fukuroi, Shizuoka, 437-8555 Japan

The author has investigated an approximate method for numeric simulation of acoustic fields of the two- and three-dimensional domains with arbitrary shapes. In the method, the collocation method is applied to analytic solutions represented in the polar coordinates. Results obtained by this method are very accurate in spite of simplicity of the method. The theoretical validity of the method, however, has not been explained sufficiently so far. In this paper, it is shown that the natural modes of some domains can be resolved into plane waves propagating in all directions. Some properties of the natural modes can be explained by the propagating direction spectra. And then a consideration is made about the case in which the collocation method brings ill results.

**Key Words:** Acoustic fields, Natural mode, Natural frequency, Plane wave, Propagating direction spectrum, Collocation method

### 1. 緒言

一定振動数の定常音場を記述するヘルムホルツの方程式において厳密解が得られるのはきわめて限られた領域形状の場合だけであり、一般的には近似解法が必要となる。近似法の主流である FEM などの領域分割法では波長が短くなると精度を確保するために分割数を大きくしなければならず、それが計算の準備や実行の負担を大きくする原因となっている。そこで、筆者らは解析解で構成した級数に選点法を適用する方法を近似解法の一つとして提案してきた<sup>(1)~(4)</sup>。現在はいまだ検討途上ではあるが、かなり広い範囲で能率と精度のよい解析が可能であることが確認されている。この方法はあらゆる問題に対応できるほどの柔軟性は持たないが、他の解法と併用したり、相互補完したりするのであれば近似解法の一つとしての存在意義は十分にあると考えられる。しかしながら、現在までの検討は適用例の拡大、すなわち経験則の積み重ねの段階を出ていない。それはそれで必要なことではあるが、視点を変えて多少は理論的な面からも検討してこの方法の基本的性質や限界などを明らかにしていくことも必要であろう。多面的な検討で方法の性質がよりはっきりすると考えられるからである。そこで本報では厳密解が得られる問題とそうでない問題の相互関係、近似解法における極座標の原点の位置と精度の関係、および選点法の基本的性質などについて検討した結果を報告する。

### 2. 厳密解がある場合とない場合の関係

図 1 に示す二つの図形は非常に近接したものである。しかし、図の左側の長方形は二次元のヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

の厳密解が得られる典型的な領域形状であるが、右側の長方形からわずかに変形した台形の厳密解は得られず、近似解によらざるを得ない。図 1 の二つの領域形状とも提案する近似解法が適用できるが、図には選点法のための計算点（部分領域の接合に利用することもできるので本研究では節点とっている）も示した。境界条件が  $\varphi = 0$  の場合の固有値と固有モードを図 1 に示した節点を用いて選点法で求めた結果を図 2 に示す。ただし、図 1 の寸法は任意の単位であり、図 2 の固有値も同じ長さの単位で表すものとする。節点数の少ない計算であるにもかかわらず長方形の一次モードの固有値は 9 桁まで厳密値に一致していた。図 2 の計算結果は領域形状の近さを反映して固有値も固有モードも相互に近いものとなっている。このような近さ、および一方は厳密解が得られて他方は得られないという違いは何によって決まるのであろうか。つぎにそれを考察する。

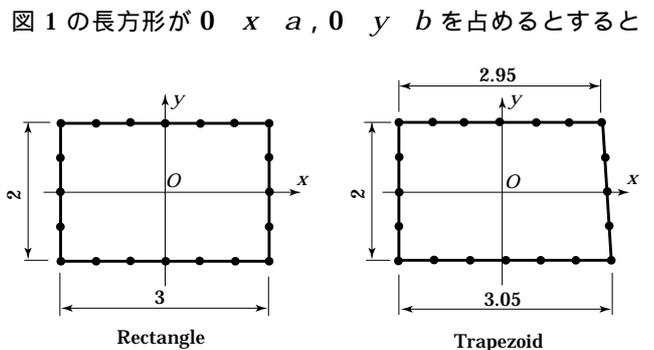


Fig1. A rectangle and a trapezoid

その固有関数（厳密解）は  $m, n$  を自然数として

$$\varphi = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2)$$

のように表される． $\alpha = m\pi/a$  ,  $\beta = n\pi/b$  と略記することによれば式(2)はつぎのように変形することができる．

$$\varphi = \frac{1}{4} \left\{ e^{j(\alpha x - \beta y)} + e^{-j(\alpha x - \beta y)} - e^{j(\alpha x + \beta y)} - e^{-j(\alpha x + \beta y)} \right\} \quad (3)$$

ここで省略されている時間因数  $\exp(j\omega t)$  を補うと式(3)の各項は平面上の4方向(相互に  $x, y$  軸に対称な関係にある)に進む平面波を表していることがわかる．つまり，長方形の固有関数は平面波の重ねあわせで表現できるのである．式(2)によれば  $x, y$  軸に平行な節線が全平面上に無数に生じるが，長方形で厳密解が得られるのは領域境界がそのような節線の一部に一致し，長方形自身が無限平面を埋め尽くす繰り返し図形になっているからに他ならない．無限平面の問題というのは実は境界条件を考えなくてよい問題なのであり，常に厳密解が得られるのである．そのような見方をすれば台形で厳密解が得られないのは長方形にきわめて近くても無限平面の解で節線が領域の輪郭に一致するものが存在しないからという説明が可能になる．

さて，厳密解が得られない台形の固有関数は  $\varphi$  が式(2)または(3)のように閉じた形で表されないだけで，平面上のあらゆる方向に進む平面波を重ねあわせで表せるという事情には変わりはない．提案する近似解法もそのことを根拠の一つに使ってきた．そこで，選点法で得た近似解を分解して進行方向ごとの平面波の振幅分布を求めたのが図3である．横軸の数字  $n$  は平面波の進行方向を表し，平面波が

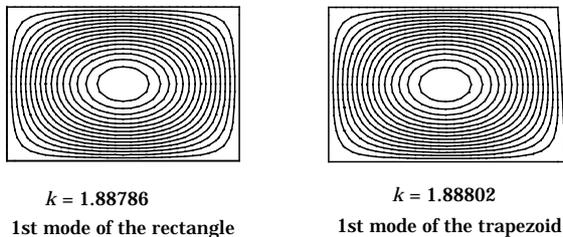


Fig.2 1st modes of the domains shown in Fig.1

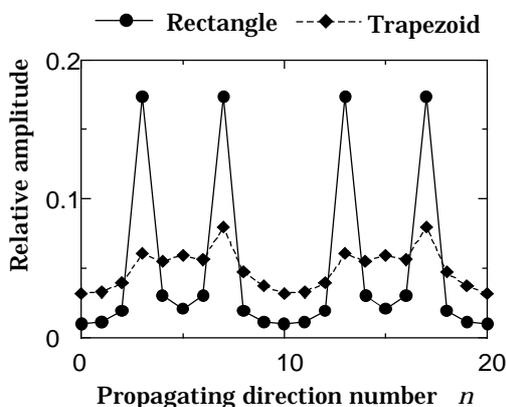


Fig.3 Propagating direction spectra of wave components of natural modes

$x$  軸と  $\gamma = 2n\pi/20$  の角度をなす方向に進行するものとしている．長方形と台形ではピークの高さはかなり違うがピーク的位置は一致している．固有値や固有関数の近さはこの進行方向スペクトルの分布の近さに対応するものであろう．また，中心に関して点対称な形状の長方形はもちろんのこと，そのような対称性がないの台形の場合にも進行方向角  $\gamma$  が  $\pi$  だけ異なると振幅が同じ値になっていることがわかる．これは領域形状にかかわらず固有関数一般について成り立つことで，固有関数は互いに正反対の方向に進む平面波が重なって進行性を打ち消し合ったものであることがこのような形であらわれているのである．

厳密解が得られるか否かの差は前述したように解が閉じた形で得られるか否かの差である．閉じた形の解が得られなくてもすべての方向に進む平面波を重ね合わせた

$$\varphi = \int_0^{2\pi} D(\gamma) e^{-jkr \cos(\gamma - \theta)} d\gamma \quad (4)$$

の形を考えれば凸形および滑らかな凹部があっても浅ければ対応できる．式(3)は式(4)における  $D(\gamma)$  がデルタ関数の和となる特別な場合である． $D(\gamma)$  は一般に  $2\pi$  を基本周期とする周期関数であるからフーリエ級数に展開できてつぎの形に書くことができる．

$$D(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{jn(\gamma + \pi/2)}$$

これを式(4)に代入して変形すれば

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\{n(\gamma + \pi/2) - kr \cos(\gamma - \theta)\}} d\gamma \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{jn\theta} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\{n\psi - kr \sin\psi\}} d\psi \end{aligned}$$

最後の結果にベッセル関数の積分表示を適用すれば

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(kr) e^{jn\theta} \quad (5)$$

を得る．これを実数表現して有限項で打ち切れれば

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(kr) \cdot \{A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\}$$

(6)これが本研究の方法で通常用いる近似の一般解である．すでに報告しているが，式(6)は領域形状が凸形，あるいは浅い滑らかな凹部がある場合の近似解析に有効である．閉じた形ではない式(4)がもっとも一般的にさまざまな場合に対応できる解表現であり，式(6)はその有限離散表現なのである．

以上をまとめると，厳密に解ける領域形状の問題とそれと領域形状に近いが厳密には解けない場合の固有モードを進行波成分に分解して進行方向スペクトルを求めるとその分布傾向には明らかに類縁関係が認められる．進行方向スペクトルの分布の近さが問題どうしの近さに密接に関連したひとつの指標になっていると考えられる．一方，厳密に

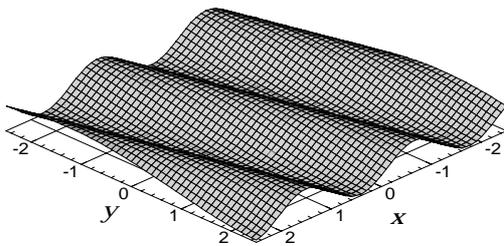
解ける長方形の場合には進行方向スペクトルが有限本の線スペクトルになるのに対して厳密に解けない台形などの場合は連続スペクトルになるという結果も得られた。ここでは具体的に述べなかったが、厳密に解けるもう一つの例である円形領域の固有モードの進行方向スペクトルはベッセル関数の積分表示から正弦波状の分布になることが明らかである。これらのことより閉じた形で解が得られるか否かは固有モードを形成する平面波の進行方向スペクトルの形状に密接に関連することがわかった。これが本章での結果である。

### 3. 近似解の原点の位置と関連する事項

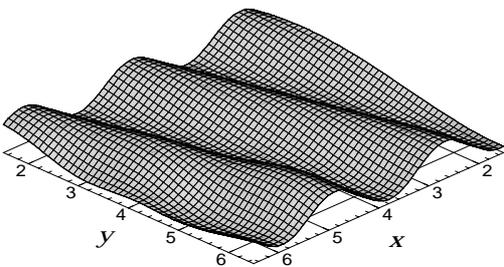
これまで式(6)を近似の一般解として解析例を積み重ねてきた。この解表現には原点をどこに取るべきかという情報は一切含まれていない。したがって、研究を始めた当初は原点をどこにとろうが結果に影響はないと考えていた。このことは式(4)のように無限項をとるのであれば正しいが、実際の数値計算においては有限項で打ち切らざるを得なく、それが事情を変化させていることがわかった。

前章では平面波の重ね合わせをベッセル関数による展開式に変形する手順を示したが、ここでは逆に平面波をベッセル関数で展開することを考える。x軸と角度 $\gamma$ をなす方向に進む平面波の点 $(r, \theta)$ における値はつぎのように表すことができる。(5)

$$e^{-jkr \cos(\gamma-\theta)} = J_0(kr) + 2 \sum_{m=1}^M (-1)^m J_m(kr) \cos m(\gamma-\theta) \quad (7)$$



(a) in the neighborhood of the origin



(b) in a place slightly distant from the origin

Fig.4 A plane wave calculated by superposition of Bessel functions in the neighborhood and a place distant from the origin

厳密には級数は無限項を取る必要があるが、ここでは有限で打ち切っている。式(7)は式(6)の特別な場合と考える頃ができる。この式の級数を11項とって $\gamma = \pi/12$ 、すなわちx軸から15°だけ傾いた方向に進む平面波を計算した様子を図4に示す。結果を原点を中心とする場所と原点から少し離れた場所の比較として示した。原点近傍では目視の範囲内での判断になるが波の分布に乱れはなく精度よく計算できている様子が見える。ところが原点から少し離れた場所では波の分布に明らかな乱れが確認できる。

以上は平面波を例にした説明であるが、式(6)などの形の級数は有限項で打ち切り、有限項で計算する限りは原点近傍で有効な式と考えるべきである。このことは近似計算を実施するにあたってつぎのことに注意しなければならないことを示している。

- (1) 節点データを作成する際に原点はなるべく領域の中心に近い位置に設定する方が精度確保の上で有利である。
- (2) アスペクト比の大きな領域形状は精度的に不利になる。したがって部分領域に分割する際には極端にアスペクト比の大きな部分領域を作るべきではない。

以上のことがらは直観的にも納得できる内容であるが、それが近似の一般解の解表現から直接説明できたというのが本章の結果である。

### 4. 選点法について

本研究で提案する近似解法における近似のポイントは二つある。一つはすでに述べたように厳密には無限級数とすべきところを有限で打ち切った級数を解に採用していることである。この点はやむをえないものと考えられる。他は境界条件を境界上に配置した離散的な点においてだけ満たすようにした選点法を採用していることである。境界条件の満たし方として選点法は唯一というわけではない。著者も積分を用いて有限要素型の離散化が可能であることを示した経験を持つ。しかしながら、アルゴリズムの簡便さや計算時間の点からみれば選点法がもっとも有利な方法であることは間違いなさであろう。残る問題は精度と信頼性である。

工学的問題に選点法を適用した例はいくつかあるが、そのような事例における選点法の評価は肯定的なものから否定的なものまでさまざまである。そのこと自体が選点法は使い方次第でいろいろな結果をもたらす可能性があることを示している。

まず、選点法を適用する対象の関数列が項数を増していくときに厳密解に収束するようなものでないとならないことは明らかである。過去の事例の中にはその点の確認が不明のものがあり、そのような場合により結果が得られなかったとしても問題の所在をただちに選点法にあるとすることは妥当とはいえないであろう。ただし、選点法は使用方法を誤ると非常に問題の多い結果をもたらすことがあるのは

事実である。

三次元ヘルムホルツ方程式の固有値問題で計算対象を直方体としたときに厳密な固有値と比較して精度の悪い値を数多く捕捉してしまったことがある。ただし、計算した固有値のすべての精度が悪かったというのではなく、精度のよいものと悪いものとが入り混じった状態で得られたのである。その計算に使用したデータは直方体表面上に完全に規則的に節点を配置したものである。この状態で起き得る現象として行列式計算における桁落ちが想定される。そこでこれに対する対策として規則的に配置した節点をその位置から領域の代表寸法の  $1/100 \sim 1/1000$  程度の不規則な揺らぎを与えてみた。ただし、稜線上の点はその位置条件に矛盾しない揺らぎの与え方をなければならない。そのようにして計算すると精度の悪かった固有値は消え、すべてが満足できる精度を持つ結果となった。

本研究で使用している解析解は規則性がきわめて高い関数群である。それに対して規則正しい点配置で選点法を適用すると当然規則的な数値の列が生成されることになる。これが災いしていると考えられる。ただし、この現象が起きた元の三次元問題では数値の挙動を把握するのが難しいためにここでは簡単な例題で説明をする。

いま、関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} x/\pi, & 0 \leq x \leq \pi \\ 2-x/\pi, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad (7)$$

と定義して  $2\pi$  を周期とする周期関数に拡張するとフーリエ級数に展開できる。これを 20 項で近似する。その近似級数の係数を選点法で決めてみる。点数は項数と同じ 20 個とし、

$$x_m = \frac{2m\pi}{20}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 19) \quad (8)$$

の各点で

$$\sum_{n=0}^{19} A_n \cos nx_m = f(x_m) \quad (9)$$

という連立方程式を解いて  $A_n$  を決めるのである。

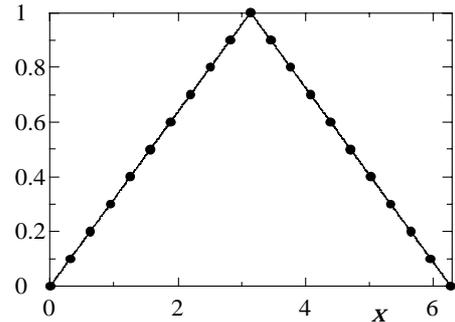
図 5 (a) は元の関数  $f(x)$  を直線で、また、係数を決めた後の式 (9) で計算した値を黒丸で示した。黒丸は係数を決める点に一致させている。当然のことながら両者の一致はよい。ところが点の数を増やして各点の間点でも計算してみると図 5 (b) のようにばらつく結果となる。つまり、係数を決めるのに使った点以外では十分な近似ができていないことがわかる。 $A_n$  を決めるための連立一次方程式の係数行列の要素は  $\cos nx_m$  であるが、式 (8) を代入すれば

$$\cos \frac{mn}{10} \pi$$

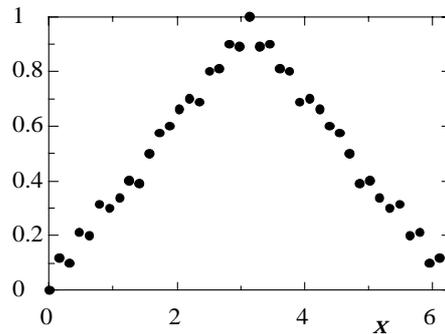
である。 $m, n$  をそれぞれの範囲内でうごかすときにこの式で計算される  $20 \times 20 = 400$  個の係数行列の要素はただの 11 種類の値をとるだけであり、正負の区別を除くと 6 種類だけになってしまう。400 個の行列要素がただの 6 個の数

値で構成される状況が連立一次方程式の数値計算に対して好ましくないことはいうまでもない。図 5 (b) の結果はこのことを反映したものである。

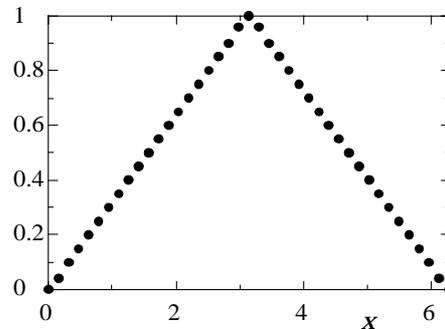
そこで乱数を利用して係数を決める点に  $1/1000$  程度の揺らぎを加えて計算した結果が図 5 (c) である。この結果は  $0 \leq x \leq 2\pi$  の区間を 40 等分した点で求めたもので、 $x=0, \pi$  以外の点は係数計算に使用していないのであるが十分な精度の結果が得られている。数値的にみると相対誤差は  $10^{-6} \sim 10^{-8}$  であった。点の位置にわずかではあるが不規則な揺らぎを加えた結果、係数決定のための方程式の行列成分の数値がばらつき、それが精度向上につながった



(a) Original function (solid line) and values of the series at the periodical collocation points



(b) Values of the series at the collocation points and the intermediate points



(c) Results obtained by using the collocation points slightly fluctuated

Fig.5 Examination of the collocation method about a triangular function

と判断される。

ここで述べた問題点はたぶん選点法独自のものである。この検討でわかったこととして選点法は無条件で使用できるほど方法として堅固なものではないが、点配置を適当に不規則にするなどの注意をすれば方法の弱点を顕在化させなくてすむということである。

## 5. 結 言

この報告で明らかになったことは以下のとおりである。

(1) 長方形のように厳密解が得られる場合と形状がそれに近くても台形など厳密解が得られない場合を比較すると、固有値や固有モードの近さを示す類縁関係は解を平面上の各方向に進行する平面波のスペクトルに分解したときのスペクトル分布の近さで説明できる。一方、厳密解が得られる場合には平面波の進行方向スペクトルが単純な形になるのに対して厳密解が得られない場合には単純にはならないことがわかった。

(2) 近似解は有限の項数で打ち切らざるを得ない。その影響は原点の近傍では精度はよいが、原点から遠ざかると相対的に精度は低下するという形で現れる。したがって計算対象はなるべく円や球に近い場合が有利で、原点はその

中心近くに設定すべきである。この注意は部分領域に分解するときにも成り立ち、アスペクト比が大きい形状の部分領域の設定は避けるべきである。

(3) 解析解は規則性高い関数群である。選点法を適用するための計算点を規則正しく取ると各点の関数地間に数値的な依存関係（一次従属性など）が生じ、計算の誤算が大きくなることがある。これを避けるためには計算点の位置を乱数などを利用して不規則な揺らぎを持たせるとよい。このような注意を払えば選点法はその簡便さにもかかわらず、信頼性の高い結果をもたらしてくれる。

## 文 献

- (1) 中川稔章・浦田喜彦, 機論, 63-614, C(1997), 3496.
- (2) 中川稔章・浦田喜彦, 機論, 65-631, C(1999), 881.
- (3) 中川稔章・浦田喜彦, 機論, 66-644, C(2000), 1082.
- (4) 浦田喜彦・内野光一郎, 機論, 67-657, C(2001), 1322.
- (5) 森口繁一・宇田川銈久・一松 信, 数学公式, (1960), 149, 岩波書店.