

解析解によるメッシュフリー三次元音場解析

Mesh-Free Analysis of 3D Acoustic Fields by Analytic Solutions

静岡理科大学 浦田 喜彦・柴山 浩
Yoshihiko URATA and Hiroshi SHIBAYAMA,
Shizuoka Institute of Science and Technology,
Toyosawa2200-2,Fukuroi, Shizuoka, 437-8555 Japan

This paper deals with a mesh-free approximate numerical method for three-dimensional acoustic fields. The keystone of this method is the collocation method applied to analytic solutions represented in the polar coordinates. In this paper, the method is applied to free and forced vibration problems of three-dimensional acoustics. Numerical results are examined by comparing with experimental results. The calculated natural frequencies of a domain with the shape of a frustum of pyramid agree with measured ones.

Key Words: Acoustic Fields, Natural frequency, Free Vibration, Forced Vibration, Numerical Simulation, Collocation Method, Experiment

1. 緒言

任意形状三次元閉空間内の音場のシミュレーションは乗用車など車室や住宅などの騒音対策との関連で重要性が大きくなってきているが、一般に用いられている解析法は有限要素法が主流である。ところがある程度高い振動数帯域までの現象に対応するためには出現する最短の波長に合わせて要素分割を細かくしなければならない。振動・波動現象では部分的に要素分割を細かくしても意味をなさないことが多く、対象領域全体の細分割が必要となる。採用するアルゴリズムにもよることであるが、細分割は一般に計算の準備段階や実行段階の負担の増大を招き、シミュレーションの結果を適切なサイクルで設計等にフィードバックすることを阻害する要因となっている。そこで、筆者らは解析解で構成した級数に選点法を適用する方法を近似解法の一つとして提案してきた。この方法の骨子は場の方程式を満たす解析解に選点法を適用して境界条件を近似的に満足させるというものであるが、場の分割を必要としないために計算規模が有限要素法に比べて圧倒的に小さいのが特長であり、精度もよい。研究はこれまでのところ、方法の基本的特徴を把握するために行ってきた二次元問題の検討を基礎にしながら、三次元音場の固有値問題（自由振動問題）まで到達した段階にある。しかしながら、実用性のある方法とするためにはさらに多くの課題について検討すべきことは言うまでもない。計算法としては理論的に検討を完結するということができなくはないが、実用を目指す工学的手法としてはやはり実験との比較を行っておくことが説得力を獲得するためにも望ましいと考える。そこで、吸音性のある壁で囲まれた空間における強制振動問題などを含めて提案する方法の適合性を計算と実験で確かめた。

記号

U : 変位ポテンシャル
 k : 波数
 x, y, z : 直角座標系

R, φ, z : 円筒座標系
 r, θ, φ : 極座標系
 ∇ : ナブラ演算子
 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$: 極座標系の単位ベクトル
 \mathbf{n} : 境界上の外向き法線方向の単位ベクトル
 $j_n(kr)$: n 次の第1種球ベッセル関数
 $h_n^{(2)}(kr)$: n 次の第2種球ハンケル関数
 $P_n^m(\zeta)$: ルジャンドル陪関数
 p : 音圧
 v_n : 粒子速度の法線方向成分
 z_n : 壁面における比音響インピーダンス

2. 解析法

2.1 方程式と一般解 強制定常音場の方程式を変位ポテンシャル U によって表せば

$$\nabla^2 U + k^2 U = F \quad (1)$$

ただし、 k は波数で音速 c 、角振動数 ω と $k = \omega/c$ のように関係づけられる。また、右辺の F は強制項である。方程式(1)を図1に示した三次元極座標で表せば

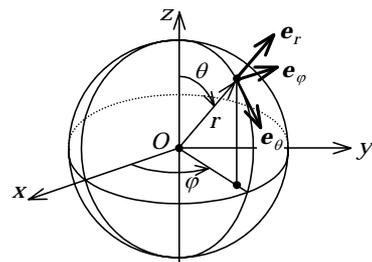


Fig.1 Three-dimensional polar coordinates

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k^2 U = F_0 \delta(r_0, \theta_0, \varphi_0) \quad (2)$$

ここでは点 $S(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ にある点音源による励振を考えている。式(2)の一般解は球ベッセル関数, ルジャンドル陪関数および三角関数で構成される同次解と非同次項 $F_0 \delta(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ に対応する特解の和である。

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ j_n(kr) \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) \right\} + F_0 \cdot h_0^{(2)}(kr') \quad (3)$$

ここに $h_0^{(2)}(kr')$ は0次の第2種球ハネケル関数であって, r' はポテンシャル U を求めようとする点の音源 $S(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ からの距離である。この関数はつぎのように初等関数で簡単に表すことができる。

$$h_0^{(2)}(kr') = -\frac{j}{kr'} e^{-jkr'} \quad (4)$$

省略されている時間因数 $\exp(j\omega t)$ を式(4)に補ってみると r' の正方向に向かって広がる球面波を表していることがわかる。式(3)は点音源から直接広がる球面波と領域を区切る壁などからの反射波の重ねあわせで音場が形成されることを意味している。

式(2),(3)を強制振動問題に適用するときには角振動数 ω が与えられることになるから波数 k は既知となり, 解に含まれる係数 A_{nm}, B_{nm} を励振源の強さ F_0 に対して決定することが課題となる。一方, 式(2),(3)で $F_0 = 0$ とすれば自由振動問題となるが, このときには波数 k は固有値の意味になる。

2.2 対称性の利用 特別な場合と押して計算対象の空間が xy, yz, zx の各平面对称な場合を考える。このとき, 対応する解は前報で述べた注意事項に従って式(3)においてつぎの変形を施したものとなる。

- [1] $B_{nm} = 0$ とすれば zx 面对称な解となる。
- [2] m を偶数にとれば yz 面对称な解となる。
- [3] $(n-m)$ が偶数の項だけを抽出すれば xy 面对称な解となる。[2]ですでに m を偶数としているので n を偶

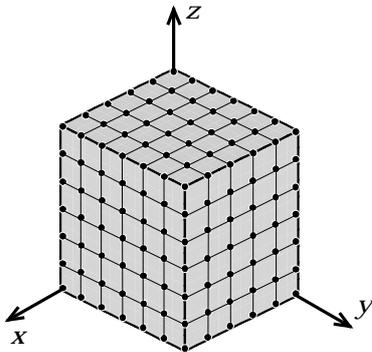


Fig.2 An example of nodal point configuration

数とすればよい。

したがって xy, yz, zx の各平面对称な解はつぎのようになる。

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ j_{2n}(kr) \sum_{m=0}^{2n} A_{nm} P_{2n}^{2m}(\cos \theta) \cos 2m\varphi \right\} + F_0 h_0^{(2)}(kr) \quad (5)$$

ここでは音源 S を原点 O に一致させることにして $r' = r$ としてある。式(5)には二重級数が含まれるが, これを適当な方法で一重化して有限項で打ち切り, 形式的につぎのように書いておく。

$$U = \sum_{j=1}^N C_j U(r, \theta, \varphi) + F_0 h_0^{(2)}(kr) \quad (6)$$

2.3 境界条件 領域を区切る壁面の条件としてここでは剛壁と吸音壁の2種類を考える。

まず, ポテンシャル U から粒子変位 \mathbf{u} を求めると

$$\mathbf{u} = \nabla U \quad (7)$$

である。剛壁上では \mathbf{u} の法線方向成分 u_n が0でなくてはならないから

$$u_n = \frac{\partial U}{\partial n} = \nabla U \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (8)$$

が剛壁の条件となる。

一方, 吸音壁の場合には壁面上で比音響インピーダンス z_n が指定されるものとする。 z_n の定義は壁面上において

$$z_n = \frac{p}{v_n} \quad (9)$$

である。ここに p は音圧, v_n は粒子速度の法線成分である。これらはポテンシャル U とつぎのように関係づけられる。

$$p = -K \nabla \cdot \mathbf{u} = -K \nabla \cdot \nabla U = -K \nabla^2 U = K k^2 U$$

$$p = \rho \omega^2 U \quad (10)$$

$$v_n = j\omega u_n = j\omega \frac{\partial U}{\partial n} \quad (11)$$

したがって, 吸音壁の条件はつぎのようになる。

$$\rho \omega U - j z_n \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad (12)$$

z_n は壁面の特性で決まる複素数で, 一般に振動数の関数である。特別な場合を除き, 一般には z_n は測定でしか求めることができない。本報でも測定値を用いる。

式(8),(12)で必要となる $\partial U / \partial n$ の計算法は前報で述べた。

2.4 選点法の適用 図2に xy, yz, zx の各平面对称な領域(この例では直方体)の $x=0, y=0, z=0$ を占める $1/8$ の部分に節点を配置した様子を示す。図では節点は等間隔に配置されているように見えるが, 計算を安定させるためには節点の位置に不規則な揺らぎをわずかに持たせることが必要である。節点に適当に付番し, 各節点における境界条件の式を並べて行列で表せば

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdots \\ C_N \end{bmatrix} = -F_0 \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \cdots \\ H_N \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここに行列の要素は剛壁の条件に対しては

$$G_{ij} = \frac{\partial U_j(r_i, \theta_i, \varphi_i)}{\partial n}, \quad H_i = \frac{\partial h_0^{(2)}(kr)}{\partial n} \quad (14)$$

である。また、吸収壁の場合には

$$\left. \begin{aligned} G_{ij} &= \rho\omega U_j(r_i, \theta_i, \varphi_i) - jz_n \frac{\partial U(r_i, \theta_i, \varphi_i)}{\partial n} \\ H_i &= \rho\omega h_0^{(2)}(r_i) - jz_n \frac{\partial h_0^{(2)}(r_i)}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となる。式(13)から C_1, C_2, \dots, C_N の値を F_0 に対して決定し、式(6)を用いれば対称領域内の任意点でのポテンシャル U およびそれから誘導される音圧や粒子速度などの諸量の計算ができる。

式(13)を自由振動問題に適用するときには $F_0 = 0$ として左

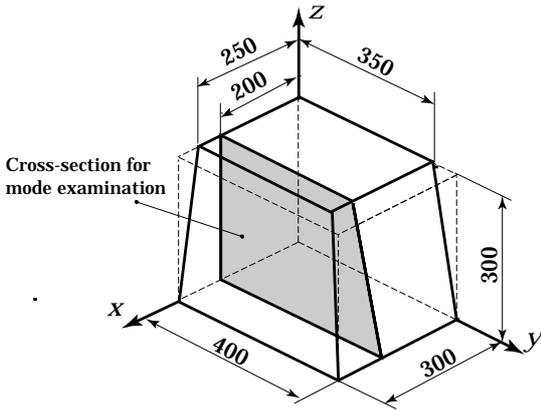


Fig.3 Geometry of a frustum of pyramid

辺の係数行列の行列式を 0 とする波数 k の値を求めることになる。

3. シミュレーションと実験の結果

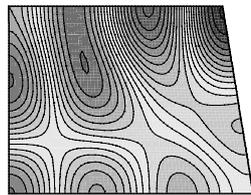
3.1 固有振動

まず、固有振動の計算結果と実験結果を比較検討したが、その対象として図3に示す台形体領域を選んだ。寸法の単位は mm である。計算上の境界条件は剛壁とした。実験ではこの形状の空間を厚さ 15mm のアクリル板で作製した箱によって設定した。実験は 1 箇所の小円孔を通して箱の中にスピーカーから音を送り、棒の先に取り付けることによって位置を可変とすることのできる小型マクログフォンによって音圧を検出し、共振振動数(固有振動数)や音圧分布の相対値の測定を行った。測定時の気温 22.4 であり、実験と比較するための計算上の音速を $c = 344.89\text{m/s}$ とした。

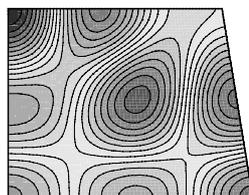
計算は互いに直角に交わる 3 面を対称面として、それ以外の 3 面上に 453 点を配置して行った。まず、代表的な固有振動数を抽出して計算と実験の結果を比較したのが表 1 である。測定値と計算値の比較はこの実験での上限とした 77 次モードまで行っているが、マイクロフォンの位置が節に近かったために実験で捕捉できなかったと推定される数個のモードを

Table 1 Comparison of calculated and measured natural frequencies of a frustum of pyramid

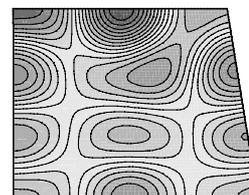
Mode	Calculated	Measured	C/M
1st	456.17 Hz	459.3 Hz	0.993
5th	856.27 Hz	858.8 Hz	0.997
10th	1103.73 Hz	1109 Hz	0.995
20th	1455.74 Hz	1463 Hz	0.995
30th	1744.75 Hz	1747 Hz	0.999
40th	1011.52 Hz	1017 Hz	0.995
50th	2108.85 Hz	2110 Hz	0.999
60th	2261.65 Hz	2263 Hz	0.999
70th	2416.96 Hz	2416 Hz	1.000
77th	2504.88 Hz	2486 Hz	1.008



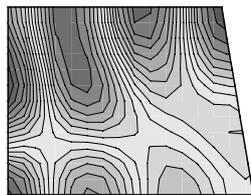
24th mode calculated
1544.9Hz



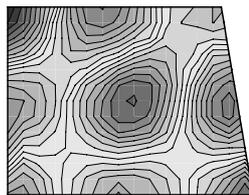
25th mode calculated
1585.4Hz



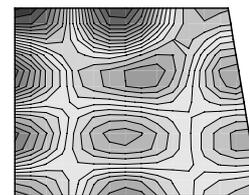
42nd mode calculated
1958.5Hz



24th mode measured
1540Hz



25th mode measured
1592Hz



42nd mode measured
1964Hz

Fig.4 Distribution of relative sound pressure on a cross-section of the frustum of pyramid

除いて計算と実験の一致の程度は大体において表 1 に示される程度であり、固有振動数は計算と実験で非常によく一致していることが確認できる。つぎに固有モードの計算と実験の結果の代表例を比較して図 4 に示す。固有モードについては計算も実験も図 3 中の着色した断面上の相対的音圧の分布を求める形で行った。測定は前述の棒の先端に取り付けたマイクロフォンの位置を上下、左右に 25mm 間隔で移動させながら行った。図 4 より、音圧分布は計算と実験で細部まで定量的にも非常によく一致していることが確認できる。

3.2 強制振動

3.2.1 垂直入射インピーダンス

実際上の問題においては空間を区切る壁面が吸音性を持つことはむしろ普通である。このような場合には壁面における反射の条件は壁面上における垂直入射インピーダンス z_n を用いて式(12)のように表される。 z_n は特別な場合には計算で求めることもあり得るが、一般には実験的に求めなければならない量である。そこで装置を自作して測定した。

まず、振動数を一定に保ち、温度や気圧を測定しておく。試料表面からマイクロフォンまでの距離 a, b を必要とする精度で設定し、それらの点における音圧の基準信号に対する振幅比を P_1, P_2 、音圧の基準信号に対する位相遅れ ϕ_1, ϕ_2 を FFT アナライザーで測定する。すると試料表面における垂直入射インピーダンスは次式で求めることができる。

$$z_n = -j\rho c \frac{P_1 e^{-j\phi_1} \sin kb - P_2 e^{-j\phi_2} \sin ka}{P_1 e^{-j\phi_1} \cos kb - P_2 e^{-j\phi_2} \cos ka} \quad (16)$$

このようにして測定した z_n の例を図 5 に示す。測定対象は発泡ポリウレタン製の吸音材（厚さ 15mm）である。

3.2.2 強制振動

ここでは図 6 に示すように直方体の一面に吸音材を貼り付けた場合の強制振動の結果を示す。頂点の一つ（計算では座標の原点に設定）に音源を置き、共振点から少し外れた振動数において図 6 の着色した断面上で計算および測定した音圧分布の結果を比較して図 7 に示す。使用した吸音材は先にインピーダンスを測定したのと同じ材料（発泡ポリウレタン、厚さ 15mm）である。

まず、図 7 の 585Hz における結果には計算、実験とも音圧分布に上下方向のわずかな非対称性が見られるが、これは吸音材の効果によるもの。吸音材は図の下側の辺に位置している。計算に使用した吸音材表面の垂直入射インピーダンス

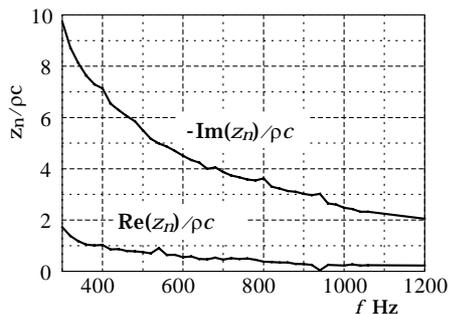


Fig. 5 Measured impedance of a porous absorber at normal incidence

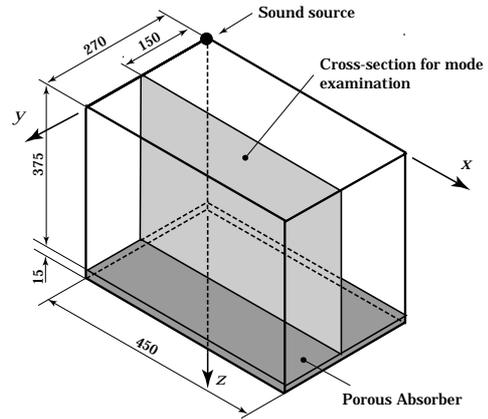


Fig. 6 Geometry of a parallelepiped

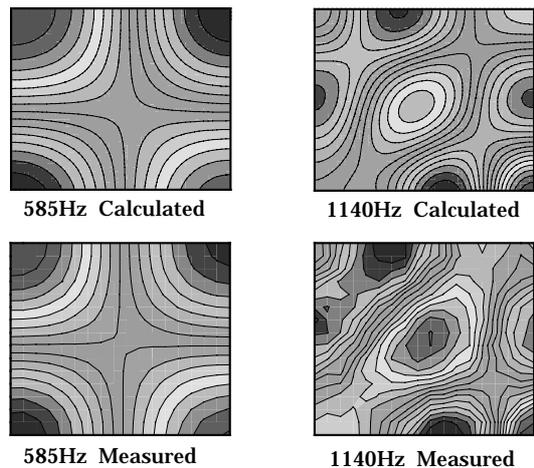


Fig. 7 Sound pressure fields on a cross-section of the parallelepiped excited by a point source

は図 5 の結果を最小二乗法で近似した値を用いている。計算はもちろん強制振動として行っている。計算と実験はよく一致していると考えてよい。

つぎに 1140Hz における音圧分布も計算と実験で概ねの一致をみているが、実はこの場合には計算データとしてのインピーダンスの値は図 5 の測定値から若干修整した値を用いている。その理由はこの段階では製作したインピーダンス測定装置に 1160Hz 近傍で装置の不調によると見られる精度の劣化があるために補正が必要になったためである。インピーダンス測定装置についての改良など細部では検討の余地を残しているが、吸音壁がある場合についても提案する方法は機能すると判断される結果となった。

4. 結言

本報告では三次元閉空間における音場を解析解と選点法の組み合わせによる近似解法でミュレーションした結果を実験と比較した。自由振動でも強制振動でも計算と実験はよく一致しており、細部ではさらに検討する余地はあるものの提案する方法が実際の現象をよく表現することを確認した。

文献

- (1) 浦田喜彦・内野光一郎, 機論, **67-657**, C(2001), 1322.
- (2) 森口繁一・宇田川銈久・一松 信, 数学公式, (1960), 165, 岩波書店.

